МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Тверской государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ

Врио ректора ТвГУ ____________ С.Н. Смирнов

«17» марта 2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

по научной специальности

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Форма обучения – очная

Тверь – 2022

Пояснительная записка

1. Цели и задачи программы

Программа вступительного экзамена предназначена для оценки уровня теоретической подготовки поступающих в аспирантуру по научной специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Основная цель - определить готовность кандидатов к научным исследованиям в области математического анализа, включая вещественный, комплексный и функциональный анализ, а также смежные разделы топологии и теории операторов.

Задачи: проверка знаний ключевых теорем, умения формулировать доказательства и применять методы в топологических пространствах, меры Лебега, банаховых и гильбертовых пространствах.

2. Структура и форма экзамена

Экзамен проводится в письменной форме на основе билетов (2 вопроса в билете), время подготовки - 60 минут. Критерии оценивания: оценка поступающему выставляется в соответствии со следующими критериями.

Отлично (80-100 баллов)

Поступающий в аспирантуру уверенной владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их строгими и полными доказательствами, уверенно отвечает на дополнительные вопросы программы вступительного испытания.

Хорошо (60-79 баллов)

Поступающий в аспирантуру владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их доказательствами, в которых допускает отдельные неточности. Отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Удовлетворительно (40-59 баллов)

Поступающий в аспирантуру знаком с основным материалом программы, приводит формулировки теорем и других утверждений, но допускает некоторые неточности, сопровождает их доказательствами, в которых допускает погрешности либо описывает основную схему доказательств без указания деталей. Отвечает на дополнительные вопросы по программе вступительного испытания, допуская отдельные неточности.

Неудовлетворительно (менее 40 баллов)

Поступающий в аспирантуру не владеет основным материалом программы, не знаком с основными понятиями, не способен приводить формулировки теорем и других утверждений, не умеет доказывать теоремы и другие утверждения, не знает даже схемы доказательств. Не отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания

Вопросы программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Формулы Сохоцкого. Принцип максимума, теорема Лиувилля. Ряды аналитических функций, теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема Сохоцкого. Вычеты и их свойства. Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Сравнение топологий. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфные отображения. Способы задания топологий. Индуцированная топология и фактор-топология. Сходимость в топологических пространствах. Компактные топологические пространства и их свойства. Теорема Гейне-Бореля о структуре компактных множеств в Rn.

2. Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. Локально компактные пространства и их свойства. Одноточечная компактификация локально компактных пространств. Связные пространства и их свойства.

3. Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовей прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Измеримые по Борелю функции. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов. Теорема Фату. Произведение мер. Теорема Фубини. Заряды (обобщенные меры). Теорема Хана. Неопределенный интеграл Лебега. Теорема Радона-Никодима. Понятие σ-конечной мере. Определенный интеграл по σ-конечной мере.

4. Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов. Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха для полунорм и нормированных пространств. Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормированном пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде

линейного ограниченного функционала. Ряды Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе. Вполне непрерывные операторы (компактные) и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор. Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, непустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора.

5. Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах $L^2(a,b)$ и $C(a,b)$. Случай вырожденного ядра. Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория ГильбертаШмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром. Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа.

6. Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стилтьеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования.

7. Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Джексона и их обобщения (периодический и непериодический случаи). Обратные теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Бернштейна и Зигмунда. Суммы Фурье, Фейера, Валле-Пуссена, Бернштейна-Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Теоремы типа Джексона. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы. Экстремальные задачи теории квадратур. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения к конструктивной теории функций.

8. Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолистность, круговое сохранение

симметричных точек). Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общее понятия о римановых поверхностях.

9. Связь ядер Коши и Шварца. Формула Гильберта. Регуляризующий множитель для задачи Гильберта. Задача Гильберта с разрывными коэффициентами в полуплоскости. Смешанная краевая задача. Задача Дирихле и ее видоизменения для плоскости со щелями. Задача Римана в односвязной и многосвязной областях. Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

Литература
Рекомендуемые основные источники

1. Асташова И.В. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие / - Москва: Евразийский открытый институт, 2011. - 112 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-374- 00486-1. Электронный ресурс. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11120.html
2. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехиздат, М.-Л., 1954.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2009. – 572 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1-2 М., Наука, 1990-1991.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 272 с.
6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – Издание 6-е, стереотипное. – Москва: Физматлит, 2010.—336 с.
7. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. МЦНМО, 2014. -560 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=56415.
8. Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного. - Москва: БИНОМ. Лаб. знаний, 2010 - 246 с. - ISBN 978-5-94774-005-9
9. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу: Учебное пособие/ А. Н. Шерстнев. – Казань: Казанский университет, 2009. – 374с. .

Рекомендуемые дополнительные источники

10. Ahlfors L. Lectures on Quasiconformal Mappings. 2-nd ed. / University Lectures Series. Vol. 38. Amer. Math. Soc., 2006.
11. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2006. – 312 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2763.
12. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учебное пособие / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. – М.: НИЦ Инфра-М, 2013. – 164 с. – ISBN 978-5-16-006429- http://www.znanium.com/bookread.php?book=377270.
13. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа - Москва: Лань, 2009. - 272 с. - (Классическая учебная литература по математике). - 1 экз. - ISBN 978-5-8114-0976-1. Электронный ресурс. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=245
14. Насыров С.Р. Метрические и линейные нормированные пространства. Задачи к лабораторным занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" Казань: КГУ, 1998. 31 с. http://kpfu.ru//staff_files/F1714458496/FA_exercises.pdf.
15. Шеретов В.Г. Классическая и квазиконформная теория римановых поверхностей. Москва-Ижевск, 2007.