



«УТВЕРЖДАЮ»

Врио ректора ТвГУ

 С. Н. Смирнов

16 февраля 2022 г.

Программа

вступительного испытания

для поступающих в аспирантуру

по научной специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

Общие требования

Поступающий в аспирантуру для обучения по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика должен знать университетские курсы дискретной математики, алгебры, математической логики, теории алгоритмов, теории сложности, теории автоматов и формальных языков. Поступающий должен уметь читать научную литературу по данной специальности на русском и английском языках, уметь пользоваться справочными изданиями и электронными ресурсами для поиска нужной информации.

Темы вступительных испытаний

1. Конечные автоматы и регулярные языки. Способы задания регулярных языков и их эквивалентность. Замкнутость класса регулярных языков относительно теоретико-множественных операций и гомоморфизмов. Теорема о разрастании, доказательство неавтоматности языков. [1]
2. Магазинные автоматы и контекстно свободные грамматики. Эквивалентность задаваемых ими языков. Теорема Огдена, доказательство того, что

язык не является контекстно свободным. Незамкнутость класса контекстно свободных языков относительно дополнений и пересечений. [5]

3. Графы. Пути на графах. Эйлеровы, гамильтоновы графы. Ориентированные и неориентированные графы. Плоские графы, теорема Эйлера о плоских графах. Алгоритмы на графах: поиск пути, поиск кратчайшего пути. Раскраска графов, двудольные графы. Деревья. Обход деревьев в глубину и в ширину. [1]
4. Линейные пространства над полями, линейные функции и операторы. Линейная независимость векторов. Конечномерные пространства. Базис и размерность. Скалярное произведение векторов. Ортогональность векторов, ортонормированный базис. Евклидовы и унитарные пространства. [3]
5. Представление линейных преобразований матрицами. Ортогональные, самосопряжённые, унитарные преобразования. Собственные вектора линейных преобразований, собственные значения. Характеристический многочлен. Переход от одного базиса к другому. Приведение матриц к диагональному виду. [3]
6. Определители. Системы линейных уравнений. Совместность системы линейных уравнений. Формула Крамера. Метод Гаусса. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Определённость квадратичных форм. Закон инерции. Критерий Сильвестра. [3]
7. Алгебраические системы, подсистемы, термы, значение терма. Изоморфизмы. Свободные системы. Эквивалентности и конгруэнтности. Классы эквивалентности, фактор-системы. Гомоморфизмы. Основная теорема о гомоморфизмах. Декартовы произведения. Многообразия систем. Замкнутость многообразий относительно подсистем, гомоморфизмов и декартовых произведений. [4]
8. Логика высказываний. Формулы логики высказываний. Семантика логики высказываний. Эквивалентность формул. Следование. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. Булевы функции, полные системы булевых функций, теорема Поста о полноте системы. Синтаксис

исчисления высказываний. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний. [5]

9. Логика предикатов. Формулы, кванторы, свободные и связанные вхождения переменных. Истинность формулы. Основные эквивалентности логики предикатов. Предварённые формулы. Примеры неэлементарных свойств систем. Исчисление предикатов. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов. Арифметика Пеано, представимость в арифметике, функция Гёделя. Неразрешимость арифметики. [5]
10. Полугруппы, моноиды, группы. Свободные полугруппы и моноиды. Строение циклического моноида. Группы перестановок, линейных преобразований, симметрий фигуры. Вложение произвольной группы в группу перестановок. Свободные группы и определяющие соотношения. [2],[4]
11. Подгруппы, смежные классы, теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы, сопряжённые элементы, гомоморфизмы групп, ядра гомоморфизмов, фактор-группы. Специальные подгруппы: центр, коммутант, нормализатор множества/элемента (централизатор). Абелевы группы. Циклические группы. Строение циклических групп. Строение конечных абелевых групп. [2]
12. Кольца, поля. Делители нуля. Числовые кольца и поля. Кольца матриц и многочленов. Простые и обратимые элементы колец. Целостные, евклидовы кольца. Разложение на простые множители. Гомоморфизмы колец, идеалы, фактор-кольца. Простые, главные, максимальные идеалы. Конечные поля. Характеристика поля. Циклическость мультипликативной группы конечного поля. [2]
13. Машины Тьюринга. Базисные функции, операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Эквивалентность моделей алгоритма. Частично рекурсивные, примитивно рекурсивные, общерекурсивные функции. Универсальные частично рекурсивные функции. [5]
14. Разрешимые и неразрешимые проблемы. Алгоритмическая сводимость. Гёделевы нумерации частично рекурсивных функций. Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества. Неразрешимость и рекурсивная перечислимость проблем самоприменимости и остановки. Неразрешимость логики первого порядка. Теорема Поста о рекурсивных множествах. [5]

15. Сложность вычислений, абстрактные меры сложности (сигнализирующие функции), аксиомы Блюма. Обобщения машин Тьюринга и другие формализации понятия алгоритма, инвариантность временной сложности с точностью до полинома. Классы P, NP и PSPACE. Сводимость за полиномиальное время. Примеры NP-полных проблем. NP-полнота проблемы выполнимости для логики высказываний. [5]

Литература

- [1] Дехтярь, М. И. Лекции по дискретной математике : Учебник / М. И. Дехтярь, С. М. Дудаков, Б. Н. Карлов. — 3-е издание, исправленное и дополненное. — Тверь : Тверской государственный университет, 2021. — 528 с.
- [2] Ван дер Варден, Б. Л. Алгебра. — СПб.: Лань, 2004. — 624 с.
- [3] Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия : Учеб. пособие для студентов мех.-мат. спец. вузов / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 319 с.: ил.
- [4] Мальцев, А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с., [1] л. портр.: ил.
- [5] Столбоушкин, А. П. Математические основы информатики [Электронный ресурс] / Столбоушкин А. П., Тайцлин М. А. — Тверь: ТвГУ, 2013.

Научный руководитель

по специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика
доктор физ.-мат. наук



С. М. Дудаков